Lycée Ibn Charaf Prof./ *Maayoufi*	**DEVOIR DE SYNTHESE N°1** *Décembre* 2015		Année Scolaire **2015 – 2016**
Niveau : **4ème Tech. 1 & 2**	Matière **: MATHÉMATIQUES**	Durée : **2 h**	Coefficient : **3**

Le sujet comporte deux pages numérotées de 1/2 à 2/2.
Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

Exercice 1 *(4points)*

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $\mathrm{I}=\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ *par :* $f(x)=\sqrt{1+\tan x}$.

1. *Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.*

2. *Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser.*

3. *On note g =* f^{-1} *; Montrer que g est dérivable sur J et que*

$$g'(x)=\frac{2x}{1+(x^2-1)^2} \text{ pour tout } x\in J.$$

4. *En appliquant le théorème des accroissements finis à g, montrer qu'il existe un réel* $\alpha\in\left]1,\sqrt{2}\right[$ *tel que :* $\frac{2\alpha}{1+(\alpha^2-1)^2}=\frac{\pi}{4}(1+\sqrt{2})$.

Exercice 2 *(7points)*

Soit f la fonction définie sur [-1,1] par : $f(x)=(1-x)\sqrt{1-x^2}$. *On note* $\mathscr{C}_f$ *sa courbe représentative dans un repère orthonormé où l'unité de longueur est* ***4cm***.

1. *a/ Étudier la dérivabilité de f en – 1 et 1. Interpréter graphiquement les résultats.*

   b/ Montrer que, pour tout x $\in\left]-1,1\right[$, *on a :* $f'(x)=\frac{2x^2-x-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

   c/ Dresser le tableau de variation de f.

   d/ Écrire l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ *au point d'abscisse 0.*

2. *Tracer* $\mathscr{C}_f$.

3. *Justifier que l'équation f(x) = x admet exactement deux solutions* α *et* β *tel que* $\alpha<\beta$.

   Déterminer β et donner, en le justifiant, une valeur décimale approchée à 10^{-1} *près de* α.

4. *a/ Déterminer l'approximation affine de f en 0.*

   b/ En déduire une valeur approchée du réel $0,99\sqrt{0,9999}$.

Exercice 3 *(3points)*

Soit h la fonction définie sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$ *par : h(x) =* $\tan x$.

1. *Montrer que :* $1\le h'(x)\le 2$, *pour tout* $x\in\left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$.

2. *En déduire que :* $x \leq \tan x \leq 2x$, *pour tout* $x \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{4}\right]$.

Exercice 4 *(6points)*

1. *a/ Déterminer le module et un argument du nombre complexe* $\sqrt{3}+i$.

b/ En déduire la forme exponentielle du nombre complexe $-4\sqrt{3}-4i$.

2. *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation* $\omega^2+4\sqrt{3}+4i=0$.

(On donnera les solutions sous forme trigonométrique).

3. *Soit* $u=\left(\sqrt{3}-1\right)-i\left(\sqrt{3}+1\right)$.

a/ Calculer u^2.

b/ Résoudre, dans $\mathbb{C}$, *l'équation :* $(E): z^2+\sqrt{2}(i-1)z+\sqrt{3}=0$.

4. *Soient* z_1 *et* z_2 *les solutions de l'équation (E) avec* $\mathrm{Re}(z_1) > 0$. *Calculer* $\frac{z_1}{z_2}$ *et déduire*

la nature de triangle OAB.

Où A et B sont les points d'affixes respectives z_1 et z_2.

Fin de l'épreuve